UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Proyecto de Innovación

Convocatoria 2020/2021

Nº de proyecto 333

Elaboración de casos prácticos de optimización lineal en el entorno Moodle (Cuestionarios y Collaborate) a través de R-exams

Responsable del proyecto:
Francisco Javier Martín Campo

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Contenido

Objetivos propuestos en la presentación del proyecto

En la solicitud del proyecto se plantearon los siguientes objetivos, clasificados en generales y específicos.

Objetivos generales:

1. Fomentar el aprendizaje autónomo del estudiante en la materia de Investigación Operativa (asignatura obligatoria de los Grados en Matemáticas, Matemáticas y Estadística e Ingeniería Matemática) como complemento a la formación recibida en el aula. Además, se fomentará la evaluación online del progreso del estudiante. Este objetivo se hace extensivo a asignaturas afines de los Grados de Ingeniería Informática y Administración y Dirección de Empresas.

Objetivos específicos:

1. Promover la participación del estudiante en la plataforma Moodle.
2. Promover el autoaprendizaje del estudiante mediante contenidos motivadores.
3. Promover el trabajo colectivo de los alumnos mediante casos prácticos más elaborados que exijan la participación colectiva del alumnado.
4. Implementación en software R de los algoritmos estudiados en clase (Simplex, Simplex Dual, Planos de Corte, Ramificación y Acotación).
5. Incorporación de enunciado atractivo, de carácter realista, para motivar al estudiante en la resolución del problema planteado.
6. Validación de los casos prácticos creados.

Estos objetivos perseguían la creación de una batería de cuestionarios basados en la asignatura de Investigación Operativa (o asignaturas afines) con el objetivo de complementar el trabajo docente realizado en el aula y promover el trabajo autónomo del estudiante. La batería de cuestionarios se han automatizado haciendo uso de software libre, R en particular, que gracias a su paquete Rexams permite la elaboración de cuestionarios con información aleatoria. Esta aleatorización de la información permite crear cuestionarios de igual dificultad pero con datos diferentes a los diferentes estudiantes.

Los temas que han cubierto los cuestionarios creados han completado los objetivos específicos del proyecto y han ampliado su rango abordando otras áreas de optimización no previstas inicialmente en el proyecto:

1. Resolución gráfica de problemas de programación lineal continua.
2. Resolución de problemas de programación lineal continua mediante el Algoritmo del Simplex.
3. Resolución de problemas de programación lineal continua mediante el Algoritmo del Simplex y considerando variables artificiales: Método de las penalizaciones y métodos de las dos fases.

4. Resolución de problemas de programación lineal continua mediante el Algoritmo Dual del Simplex.
5. Resolución de problemas de análisis de sensibilidad y post-optimización.
6. Resolución de problemas de programación lineal entera: Método de Planos de Corte y Método de Ramificación y Acotación.
7. Razonamiento lógico de árboles de ramificación y acotación

Estos cuestionarios han sido integrados en Moodle aunque pueden ser exportados, usando la misma librería de R, a formato pdf y Collaborate.

Objetivos alcanzados

Durante la realización del proyecto, se han implementando cuestionarios que han cubierto todas las áreas planteadas en el comienzo del mismo. Aun siendo un éxito, los códigos generados requieren revisión y validación para incorporar mejoras técnicas.

Los puntos críticos del proyecto se han centrado en las siguientes áreas, pero han sido resueltos satisfactoriamente:

1. Creación de gráficos dependientes de los datos: Este factor ha sido clave para la generación de cuestionarios de resolución gráfica de problemas de programación lineal continua y cuestionarios de árboles de ramificación y acotación. Gracias a la versatilidad de R en la generación de gráficos ha sido posible incorporar gráficos con información aleatoria basada en los datos que recibe cada estudiante.
2. Implementación del Algoritmo del Simplex: A pesar de que R cuenta con librerías que permiten la resolución de problemas de programación lineal continua (y entera), era necesaria la implementación de este algoritmo para poder realizar cuestionarios y asegurar el número de iteraciones reales que el estudiante desarrollará.
3. Implementación del método de las penalizaciones para problemas de programación lineal continua. Este método incorpora un parámetro M que hace necesaria la incorporación de formulación paramétrica.
4. Implementación del Método de la Restricción Artificial para el Algoritmo Dual del Simplex. Al igual que el método anterior, este algoritmo necesita la incorporación de un parámetro M haciendo necesaria formulación paramétrica.

Aunque el equipo de trabajo está satisfecho con los resultados obtenidos al haber podido cubrir gran parte del temario de una asignatura de investigación operativa, aún queda por incorporar parte del temario que merece una reflexión adicional debido a su dificultad de implementación:

1. Modelización: La complejidad de incorporar incertidumbre a los modelos de programación matemática manteniendo problemas homogéneos, hace que necesitemos mayor tiempo para pensar en ello.
2. Programación no lineal continua: En este caso, la resolución de problemas no lineales da lugar a resoluciones complejas donde la obtención de unos u otros resultados pueden diferir significativamente en la dificultad del problema. Es por ello que también se valorará cómo incorporar este tipo de cuestionarios.

Metodología empleada en el proyecto

La metodología empleada en el proyecto ha estado basada en las siguientes fases:

1. Diseño de problemas de optimización basados en las diferentes partes temáticas de la asignatura de investigación operativa.
2. Implementación de problemas usando software estadístico R.
3. Validación de los problemas creados.

Los casos prácticos han sido creados por profesores que imparten asignaturas con contenido de optimización en los Grados de Matemáticas, Matematicas y Estadística, Ingeniería Matemática (impartidos en la Facultad de CC. Matemáticas), profesores que imparten asignaturas con contenido en optimización en el Grado en Ingeniería Informática (Facultad de Informática) y profesores que imparten la asignatura de Métodos de Decisión en el Grado en Administración y Dirección de Empresas (Facultad de CC. Económicas y Empresariales).

El trabajo realizado en la creación de los casos prácticos desemboca en la integración de estos, como actividad evaluable dentro de la plataforma Moodle, con el principal objetivo de explotar al máximo las capacidades de la plataforma en materia de evaluación.

El desarrollo del trabajo se ha estructurado en los siguientes niveles:

1\. Definición de los problemas prácticos a incluir en la base de cuestionarios.

2\. Apertura de un seminario de trabajo con acceso a todos los profesores del equipo, para dar soporte a los casos prácticos.

3\. Elaboración de casos prácticos enfocados a las distintas componentes temáticas de una asignatura de optimización.

6\. Integración de los casos prácticos en Moodle.

Todo ello se ha elaborado en un espacio de trabajo dentro de la plataforma Moodle titulado “PIMCD 333”, cuyo acceso es restringido a los autores del proyecto, pero, previa petición, puede ser explorado por cualquier interesado/a. En el Anexo de este documento pueden encontrarse ejemplos de cuestionarios creados.

Recursos humanos

Los recursos humanos con los que ha contado el proyecto han sido los profesores integrantes del equipo formado:

- F. Javier Martín Campo[1]
- Rosa Alonso Sanz[1]
- Jorge González Ortega[1]
- Susana Muñoz López[2]
- M. Teresa Ortuño Sánchez[1]
- J. Tinguaro Rodríguez González[1]
- Juan Antonio Tejada Cazorla[1]
- Gregorio Tirado Domínguez[3]
- Francisco Javier Yáñez Gestoso[1]

Se ha solicitado un nuevo proyecto (y ha sido concedido provisionalmente) como continuación de este proyecto y todos aquéllos en los que se ha estado trabajando (incorporando también cuestionarios para evaluar asignaturas de estadística). El objetivo del nuevo proyecto será la evaluación de la batería de cuestionarios creada poniéndola a servicio de los estudiantes.

[1] Facultad de CC. Matemáticas
[2] Facultad de Informática
[3] Facultad de CC. Económicas y Empresariales

Desarrollo de las actividades

Para la consecución de los objetivos descritos en la propuesta, se han planteado las siguientes actividades:

1. Estudio del artículo de referencia en nuestro proyecto: "*Flexible generation of e-learning exams in R: Moodle quizzes, OLAT assessments, and beyond*", de A. Zeileis, N. Umlauf y F. Leisch en *Journal of Statistical Software* 58(1), pp.: 1-36 y creación de los primeros casos prácticos.

2. Diversas reuniones con el equipo del proyecto donde se expusieron las dificultades adquiridas en la implementación de los primeros problemas.

3. Implementación de casos prácticos relacionados con los distintos temas a tratar.

4. Validación de los casos prácticos implementados.

Anexo

A continuación se presentan capturas de pantalla de algunos casos de estudio creados con el fin de ilustrar el material creado por el equipo de trabajo.

El seminario virtual de trabajo presenta la siguiente estructura:

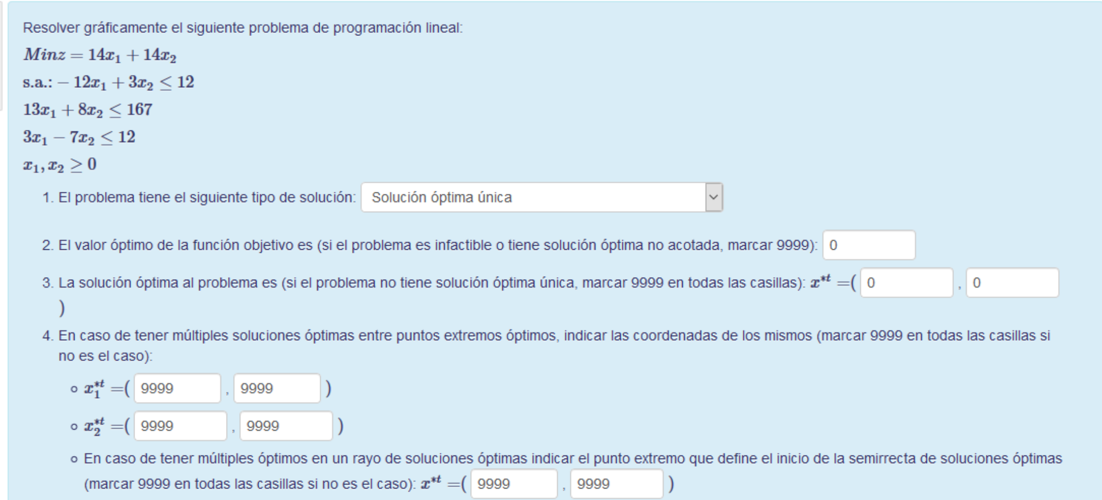
Se cuenta con el material básico para generar cuestionarios y los diferentes cuestionarios que han sido creados.

Es importante remarcar que cada cuestionario creado puede constar del número de problemas deseado, donde las diferencias están en los datos y no en la descripción del problema. De este modo, el profesor garantiza que todos los alumnos resolverán un problema de igual dificultad, pero con datos diferentes.

A modo de ejemplo, se pretende ilustrar el funcionamiento de los mismos con capturas de pantalla. Para ello, se mostrarán capturas de pantalla de algunos de los diferentes cuestionarios creados junto a su solución.

1. Resolución gráfica de problemas de programación lineal

Se muestra a continuación un ejemplo de un problema de programación lineal para ser resuelto gráficamente. En primer lugar se muestra el enunciado y, a modo de ejemplo, una forma de rellenarlo.



Resolver gráficamente el siguiente problema de programación lineal:

$Min z = 14x_1 + 14x_2$

s.a.: $-12x_1 + 3x_2 \leq 12$

$13x_1 + 8x_2 \leq 167$

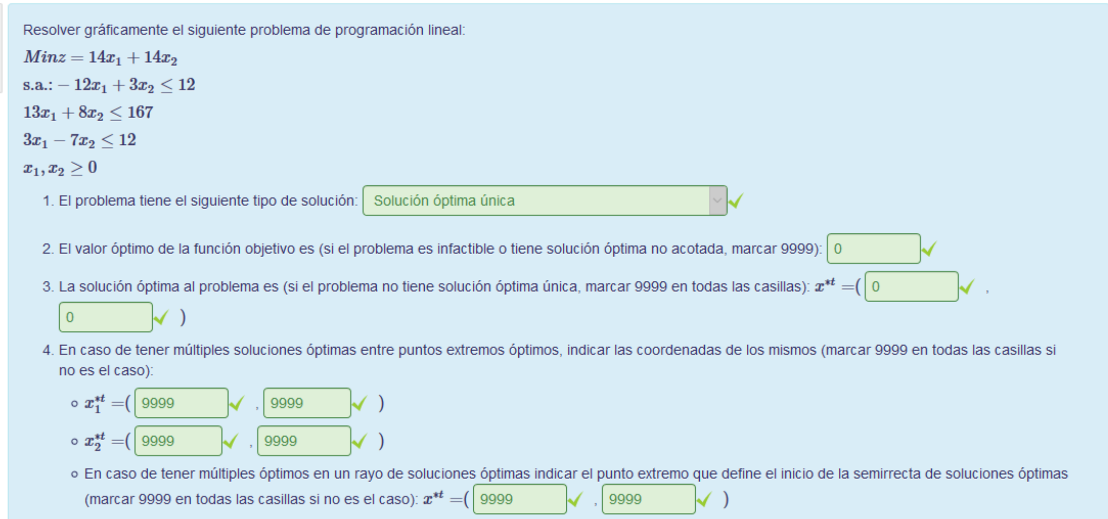
$3x_1 - 7x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

1. El problema tiene el siguiente tipo de solución: Solución óptima única
2. El valor óptimo de la función objetivo es (si el problema es infactible o tiene solución óptima no acotada, marcar 9999): 0
3. La solución óptima al problema es (si el problema no tiene solución óptima única, marcar 9999 en todas las casillas): $x^{*t} =($ 0 , 0 $)$
4. En caso de tener múltiples soluciones óptimas entre puntos extremos óptimos, indicar las coordenadas de los mismos (marcar 9999 en todas las casillas si no es el caso):
   - $x_1^{*t} =($ 9999 , 9999 $)$
   - $x_2^{*t} =($ 9999 , 9999 $)$
   - En caso de tener múltiples óptimos en un rayo de soluciones óptimas indicar el punto extremo que define el inicio de la semirrecta de soluciones óptimas (marcar 9999 en todas las casillas si no es el caso): $x^{*t} =($ 9999 , 9999 $)$

Como se puede observar, el estudiante tiene distintas opciones de respuesta. En este caso de estudio, menús desplegables e introducción de valores numéricos. También son aceptadas otro tipo de alimentación como múltiples respuestas o formato libre.

Una vez que el estudiante envía los resultados, automáticamente recibe la puntación recibida, qué apartados ha respondido correcta o incorrectamente además de la solución detallada del problema:



Resolver gráficamente el siguiente problema de programación lineal:

$Min z = 14x_1 + 14x_2$

s.a.: $-12x_1 + 3x_2 \leq 12$

$13x_1 + 8x_2 \leq 167$

$3x_1 - 7x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

1. El problema tiene el siguiente tipo de solución: Solución óptima única
2. El valor óptimo de la función objetivo es (si el problema es infactible o tiene solución óptima no acotada, marcar 9999): 0
3. La solución óptima al problema es (si el problema no tiene solución óptima única, marcar 9999 en todas las casillas): $x^{*t} =($ 0 , 0 $)$
4. En caso de tener múltiples soluciones óptimas entre puntos extremos óptimos, indicar las coordenadas de los mismos (marcar 9999 en todas las casillas si no es el caso):
   - $x_1^{*t} =($ 9999 , 9999 $)$
   - $x_2^{*t} =($ 9999 , 9999 $)$
   - En caso de tener múltiples óptimos en un rayo de soluciones óptimas indicar el punto extremo que define el inicio de la semirrecta de soluciones óptimas (marcar 9999 en todas las casillas si no es el caso): $x^{*t} =($ 9999 , 9999 $)$

SOLUCIÓN

La representación gráfica del problema:

$Min z = 14x_1 + 14x_2$

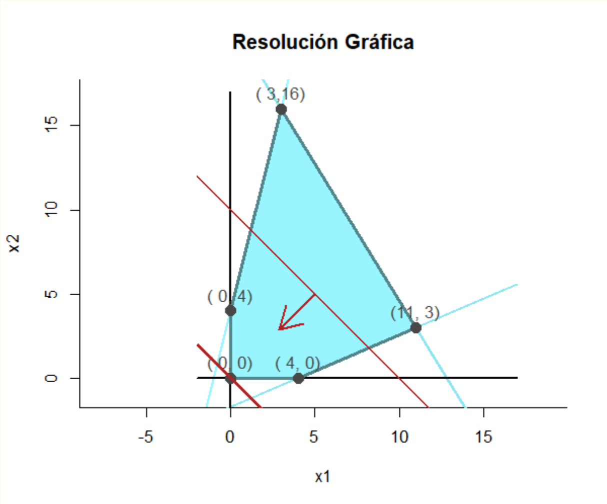
s.a.: $-12x_1 + 3x_2 \leq 12$

$13x_1 + 8x_2 \leq 167$

$3x_1 - 7x_2 \leq 12$

$x_1, x_2 \geq 0$

viene dada en el siguiente gráfico:



donde se pueden observar las tres restricciones del problema que definen la región de soluciones factibles obteniéndose los siguientes puntos extremos:

- $(0, 0)$
- $(0, 4)$
- $(3, 16)$
- $(11, 3)$
- $(4, 0)$

El problema es de minimización. El gradiente de la función objetivo es $\nabla = (14, 14)$ que indica la dirección de maximización, mientras que la opuesta, $-\nabla = (-14, -14)$ indica la dirección de minimización.

Por tanto, siguiendo la dirección opuesta al gradiente de la función objetivo, se observa que el punto extremo $(0, 0)$ es la solución óptima del problema cuyo valor de la función objetivo es 0 (la función objetivo, pasando por ese punto está representada en rojo).

2. Algoritmo del Simplex

Se muestra a continuación un ejemplo de un problema de programación lineal que debe ser resuelto usando el Algoritmo del Simplex. En primer lugar se muestra el enunciado y, a modo de ejemplo, una forma de rellenarlo.

Dado el siguiente modelo de programación lineal, usa el algoritmo del Simplex (si es necesario usa el método de las dos fases) para responder a las siguientes preguntas:

$Min z = -5x_1 - 3x_2$

s.a.:$3x_1 + 1x_2 \leq 18$

$1x_1 - 1x_2 \geq 2$

$2x_1 + 2x_2 = 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Nota: *Las respuestas numéricas deben redondearse a 2 decimales.*

1. El problema tiene el siguiente tipo de solución:
2. El valor de la función objetivo es (si el problema es infactible, marcar 9999; si el problema tiene solución óptima no acotada indicar el valor de la función objetivo en la última solución básica obtenida):
3. La solución al problema es (si el problema es infactible, marcar 0 en todas las casillas; si el problema tiene solución óptima no acotada indicar la última solución básica obtenida): $x^{*t} = (\;,\;,\;,\;)$
4. En caso de tener múltiples óptimos en una región acotada, iterar una vez más y señalar el punto extremo obtenido (marcar 0 en todas las casillas si no es el caso): $x_2^{*t} = (\;,\;,\;,\;)$
5. En caso de tener múltiples óptimos en una región no acotada o solución óptima no acotada, determinar una dirección extrema (marcar 0 en todas las casillas si no es el caso): $d^{*t} = (\;,\;,\;,\;)$
6. Rellena los valores del vector y_2: $y_2^t = (\;,\;,\;)$
7. El coste reducido de la variable x_2: $z_2 - c_2 = \;)$

El estudiante tras rellenar y enviar el cuestionario, como antes, recibe su puntuación además de la solución detallada del problema:

Dado el siguiente modelo de programación lineal, usa el algoritmo del Simplex (si es necesario usa el método de las dos fases) para responder a las siguientes preguntas:

$Minz = -5x_1 - 3x_2$

s.a.:$3x_1 + 1x_2 \leq 18$

$1x_1 - 1x_2 \geq 2$

$2x_1 + 2x_2 = 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

Nota: *Las respuestas numéricas deben redondearse a 2 decimales.*

1. El problema tiene el siguiente tipo de solución: Solución óptima única
2. El valor de la función objetivo es (si el problema es infactible, marcar 9999; si el problema tiene solución óptima no acotada indicar el valor de la función objetivo en la última solución básica obtenida): -13
3. La solución al problema es (si el problema es infactible, marcar 0 en todas las casillas; si el problema tiene solución óptima no acotada indicar la última solución básica obtenida): $x^{*t} =($ 2,5 , 0 , 12 , 0,5 $)$
4. En caso de tener múltiples óptimos en una región acotada, iterar una vez más y señalar el punto extremo obtenido (marcar 0 en todas las casillas si no es el caso): $x_2^{*t} =($ 0 , 0 , 3 , 0 $)$
5. En caso de tener múltiples óptimos en una región no acotada o solución óptima no acotada, determinar una dirección extrema (marcar 0 en todas las casillas si no es el caso): $d^{*t} =($ 0 , 0 , 0 , 0 $)$
6. Rellena los valores del vector y_2: $y_2^t =($ -2 , 1 , 2 $)$
7. El coste reducido de la variable x_2: $z_2 - c_2 =$ 4 $)$

SOLUCIÓN

El problema a resolver es el siguiente:

$Minz = -5x_1 - 3x_2$

s.a.:$3x_1 + 1x_2 \leq 18$

$1x_1 - 1x_2 \geq 2$

$2x_1 + 2x_2 = 5$

$x_1, x_2 \geq 0$

que debe transformarse a su forma estándar (introduciendo las variables de holgura x_3 y x_4 más dos variables artificiales x_5 y x_6) que viene dada por:

$Minz = -5x_1 - 3x_2$

s.a.:$3x_1 + 1x_2 + x_3 = 18$

$1x_1 - 1x_2 - x_4 + x_5 = 2$

$2x_1 + 2x_2 + x_6 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

Al existir variables artificiales, se aplicará el método de las dos fases.

1ª Fase: $Minw = x_5 + x_6$

La primera tabla del Simplex viene dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$w_j - c_j$	3	1	0	-1	0	0	7
x_3	3	1	1	0	0	0	18
x_5	1	-1	0	-1	1	0	2
x_6	2	2	0	0	0	1	5

La segunda tabla del Simplex viene dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$w_j - c_j$	0	4	0	2	-3	0	1
x_3	0	4	1	3	-3	0	12
x_1	1	-1	0	-1	1	0	2
x_6	0	4	0	2	-2	1	1

La tercera tabla del Simplex viene dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
$w_j - c_j$	0	0	0	0	-1	-1	0
x_3	0	0	1	1	-1	-1	11
x_1	1	0	0	-1/2	1/2	1/4	9/4
x_2	0	1	0	1/2	-1/2	1/4	1/4

que resulta ser la tabla óptima para el problema de la primera fase. Al no existir variables artificiales en la base, podemos continuar con la segunda fase.

2ª fase: Función objetivo original La primera tabla del Simplex (se eliminan las variables artificiales de la anterior y se recalculan los costes reducidos y el valor de la función objetivo) viene dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
$z_j - c_j$	0	0	0	1	-12
x_3	0	0	1	1	11
x_1	1	0	0	-1/2	9/4
x_2	0	1	0	1/2	1/4

La segunda tabla del simplex viene dada por:

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
$z_j - c_j$	0	-2	0	0	-25/2
x_3	0	-2	1	0	21/2
x_1	1	1	0	0	5/2
x_4	0	2	0	1	1/2

que resulta ser la tabla óptima. Se puede comprobar que todos los valores $z_j - c_j$ son menores o iguales que 0 lo que implica que, usando el primer teorema del Simplex, el problema dado tiene solución óptima. Como los costes reducidos $z_j - c_j$ de las variables no básicas son distintos de 0, podemos determinar que el problema dado tiene una única solución óptima.

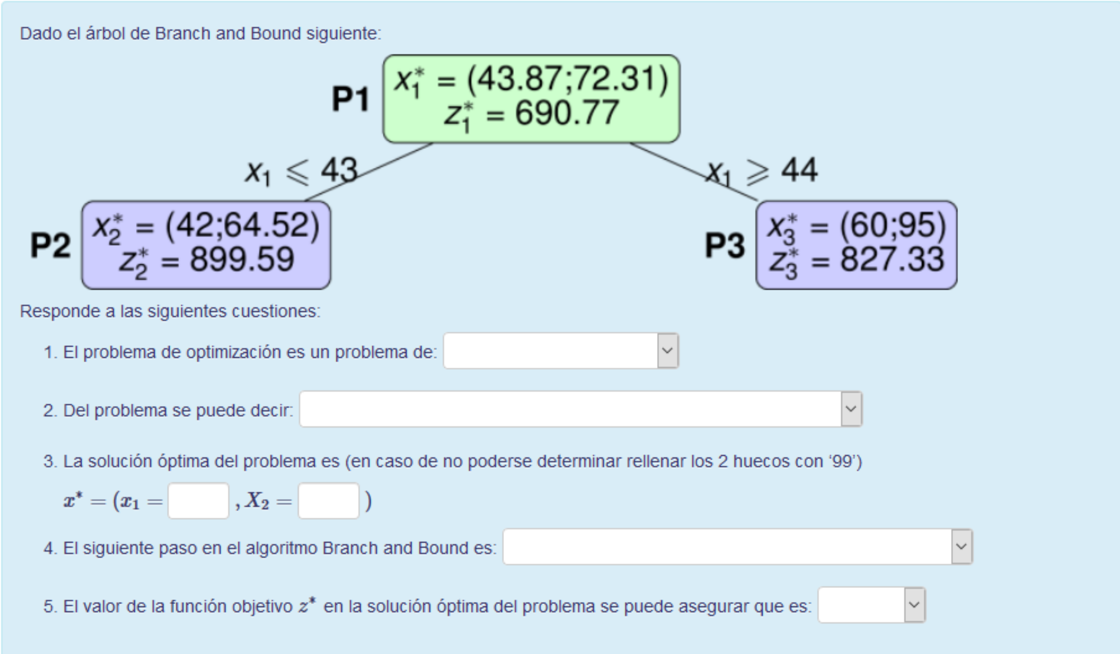
Por tanto, la solución óptima del problema es:

$$(2.5, 0, 10.5, 0.5)$$

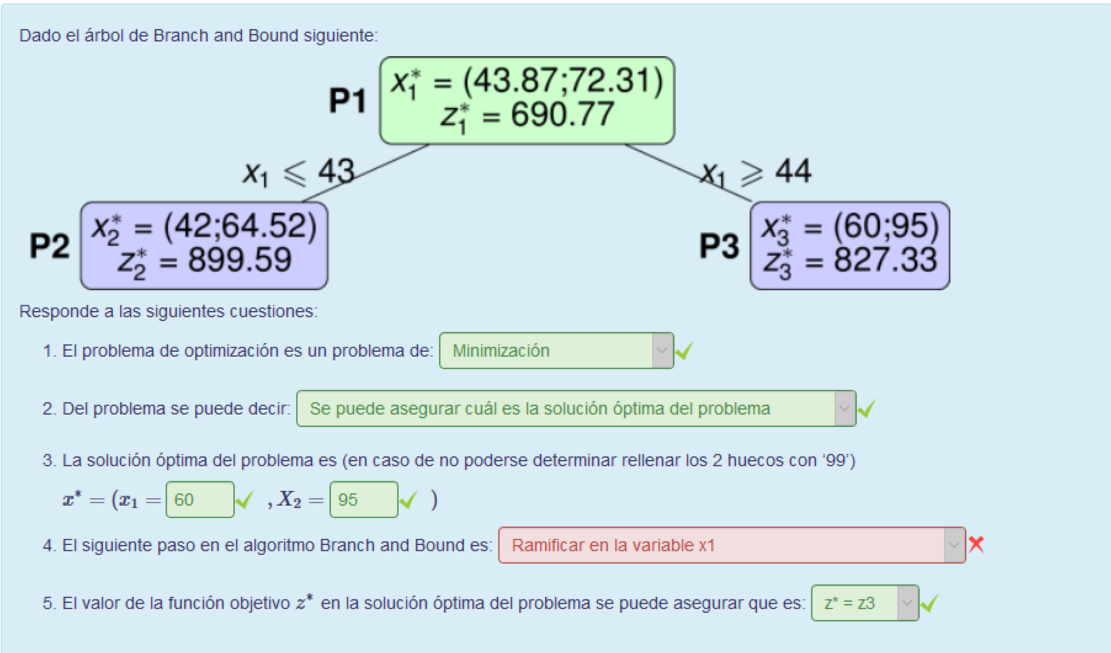
con un valor en la función objetivo de: -12.5

3. Interpretación de un Árbol de Ramificación y Acotación

A continuaciónn se muestra un ejemplo de árbol del método de Ramificación y Acotación sobre el que el estudiante debe resolver diferentes cuestiones lógicas.



El estudiante tras rellenar y enviar el cuestionario, como antes, recibe su puntuación además de la solución detallada del problema:



En primer lugar, como el valor de la función objetivo en el nodo raíz z_1 es menor que cualquiera de los valores de la función objetivo en los problemas P1 y P2, es decir, z_2 y z_3, se puede determinar que el problema es de minimización.

Observando los nodos de los problemas P2 y P3, después de ramificar en la variable 1, se puede observar que el nodo correspondiente al problema P3 ha alcanzado una solución entera factible para el problema original.

Como $z_2 > z_3$, no se puede mejorar el valor de la función objetivo en el nodo no entero y, por tanto, se puede garantizar que se ha alcanzado la solución óptima del problema, siendo la alcanzada por el nodo entero.

Como se ha alcanzado la solución óptima del problema, el siguiente paso en el algoritmo es PARAR.

Como se ha alcanzado la solución óptima del problema, z* = z3.